

Теоремы Леви и Фату и теорема Уильямсона-Хилла по множеству с.т.-конечной меры

Левый $\int f_n(x)$ — посл-ть инт. ф-ций; $f_n \leq f_{n+1}$, $\forall n=1, 2, \dots$, н.в. $x \in X$; $\exists C = \text{const} : \int_X f_n(x) d\mu \leq C$, $\forall n \geq 1$. $\int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ (конеч. или бесконеч.). Тогда:
 1) $f(x)$ интерп.; 2) $\int_X f(x) d\mu \leq C$; 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f(x) d\mu$

1) Не опр. общ., считаем, что $f_n(x) \geq 0$ (иначе $\tilde{f}_n(x) = f_n - f_1 \geq 0$, н.в., $\tilde{f}_n \leq \tilde{f}_{n+1}$, $\forall n \geq 1$, $\int_X \tilde{f}_n d\mu \leq \int_X f_1 d\mu + C \equiv \tilde{C}$)

2) $\mu\{f(x) = +\infty\} = 0$ — о-м это. $\int \{f(x) = +\infty\}$. Введем мн-ва при $M > 0$ $\mathcal{A}_n^M = \{x : f_n(x) \geq M\}$; $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n^M = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}_n^M$ (убо ясно, что $\mathcal{A}_n^M \subseteq \mathcal{A}_{n+1}^M$).
 $\mu(\mathcal{A}^M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\mathcal{A}_n^M)$; $\mu(\mathcal{A}_n^M) \leq \frac{1}{M} \int_X f_n d\mu \leq \frac{1}{M} \int_X f d\mu \leq \frac{C}{M}$
 $\Rightarrow \mu(\mathcal{A}^M) \leq \frac{C}{M}$. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^M$, $x \in \mathcal{A} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = +\infty \Rightarrow f_n(x) \geq M$ с нек. $N \Rightarrow x \in \mathcal{A}_n^M$ при $n \geq N(x) \Rightarrow \mu(\mathcal{A}) \leq \mu(\mathcal{A}^M) \leq C/M$, $\forall M > 0$. Устремим $M \rightarrow \infty$: $\mu(\mathcal{A}) = 0$

3) Дост. о-ть, что $f(x)$ инт. $\Rightarrow f_n(x) \leq f(x) \Rightarrow$ все О.К.!
 Введем прост. ф-цию $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k \chi_{\{k \leq f(x) \leq k+1\}}$, $X = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}_k \cup \mathcal{A}$, но $\mathcal{A}$ не существенно из 2).
 Ясно, что $\varphi(x) \leq f(x)$, но $f(x) \leq \varphi(x) + 1$ (кроме $\mathcal{A}$, но на нем f инт.) О-м, что φ инт., т.е., что $\sum_{k=0}^{\infty} k \mu(\mathcal{A}_k) < \infty$. Введем $\varphi_m(x) = \sum_{k=0}^m k \chi_{\mathcal{A}_k}$. При этом $0 < \varphi_m(x) \leq m+1$. $\int_X \varphi_m(x) d\mu = \sum_{k=0}^m k \mu(\mathcal{A}_k) \leq \int_X f(x) d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\mu \leq C \Rightarrow \int_X \varphi_m(x) d\mu \leq C \Rightarrow \forall m \Rightarrow \int_X \varphi(x) d\mu \leq C \Rightarrow \varphi(x)$ инт. $\Rightarrow f(x)$ инт. ■

Фату $\int f_n(x) \geq 0$, инт. и $f_n \xrightarrow{n.b.} f(x)$, и $\int_X f_n(x) d\mu \leq C$. Тогда $f(x)$ инт., и $\int_X f(x) d\mu \leq C$
 $\Psi_n(x) = \inf_{k \geq n} f_k(x)$; $0 \leq \Psi_n(x) \leq \Psi_{n+1}(x)$, $\forall x \in X$; $\Psi_n(x) \leq f_n(x)$; Ψ_n — измер. $\Rightarrow \Psi_n$ интерп. и $\int_X \Psi_n(x) d\mu \leq \int_X f_n(x) d\mu \leq C$, $\forall n \Rightarrow \int_X \Psi(x) d\mu \leq C$. $\Psi_n(x) = \inf_{k \geq n} f_k(x)$, а $f_k \rightarrow f \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n(x) = f(x)$

μ - σ -конеч. мера, if $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$, $\mu(X_k) < +\infty$

изм. $f(x)$ наз-ся **интерп.** на X , if $f(x)$ интерп. на X_k , и $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_k} |f(x)| d\mu < \infty$, и $\int_X f(x) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_k} f(x) d\mu$

$\Downarrow$ $\int f(x) d\mu \geq 0$, изм.; инт. на $X \Leftrightarrow \sup_{0 \leq \varphi(x) \leq f(x)} \int_X \varphi(x) d\mu < \infty$, где

$\varphi(x)$ прост. ф-ция с конеч. числом знач-й, и, более того, $\int_X f(x) d\mu = \sup_{0 \leq \varphi(x) \leq f(x)} \int_X \varphi(x) d\mu$

Δ $\int A_{kn} = \{ \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \}$, $k=0, 1, \dots$; $n=1, 2, \dots$; $A_{kn} \cap A_{in} = \emptyset$ $k \neq i$
 $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_{kn} = X \setminus \{ f(x) = +\infty \} = X$ почти все
 (ин-бо) меры 0

$\{ f(x) \geq M \} \cap B$: на B $f(x) = +\infty$, $\mu(B) > 0 \Rightarrow$ не инт.

$\int \varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^n} \mu(A_{kn})$: $0 \leq \varphi_n(x) \leq f(x)$, $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$;
 $f(x) < \varphi_n(x) + \frac{1}{2^n} \Rightarrow \varphi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$. Поэтому $\varphi_n(x) = f(x) \varphi_{n+1}(x)$

она принимает конеч. число знач-й, неотриц., и $\varphi_n \leq f$;
 $\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$, $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$

$\Rightarrow$ f -инт. $\Rightarrow \varphi(x)$ инт. ($\varphi \leq f$ по усл. $\Downarrow$), и $\int_X \varphi(x) d\mu \leq \int_X f(x) d\mu \Rightarrow \sup_{0 \leq \varphi \leq f} \int_X \varphi(x) d\mu \leq \int_X f(x) d\mu$.

По $\Downarrow$ Леви: $\int_X \varphi_n(x) d\mu \rightarrow \int_X f(x) d\mu \Rightarrow \sup$ достиж-ся
 $\int_X f(x) d\mu = \sup_{0 \leq \varphi \leq f} \int_X \varphi(x) d\mu$

$\Leftarrow$ По $\Downarrow$ Леви, т.к. $\int_X \varphi_n d\mu \leq \sup_{0 \leq \varphi \leq f} \int_X \varphi d\mu$ и

$\varphi_n \rightarrow f$, φ_n неуб., то f интерп.; $\int_X \varphi_n(x) d\mu \rightarrow \int_X f(x) d\mu$
 $\Rightarrow \sup_{0 \leq \varphi \leq f} \int_X \varphi d\mu = \int_X f(x) d\mu$